

解答・解説

(1)

- ① 水面と辺AB, AC, AD, AEとの交点をそれぞれG, H, I, Jとする。

点Aから面BCDEに垂線AKを下ろすと、 $\triangle ABK$ は直角二等辺三角形なので、

$$AK = AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって、点Aから水面までの距離が $\frac{\sqrt{3}}{2}$  cm より

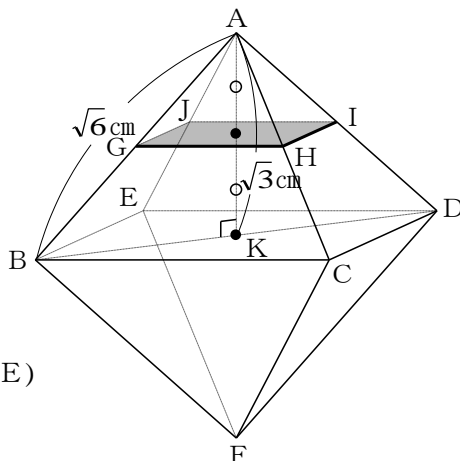
(四角すいA-GH I J)の(四角すいA-BCDE)

で、相似比は $\frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = 1 : 2$

したがって、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$ となるので、

求める体積(水の量)は、(四角すいF-BCDE)+(四角すいA-BCDE) $\times \frac{7}{8}$

$$= (\text{四角すいA-BCDE}) \times \frac{15}{8} = \left( \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{15}{8} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^3\text{)} \dots (\text{答})$$



- ② ①のGHがBCと一致するように傾ければよく、水面は右の図のBCPQとなる。

①より、水が入っていない部分の体積は、

(四角すいA-BCDE) $\times \frac{1}{8}$  (cm<sup>3</sup>) となる。

AP = AQ = x (cm),

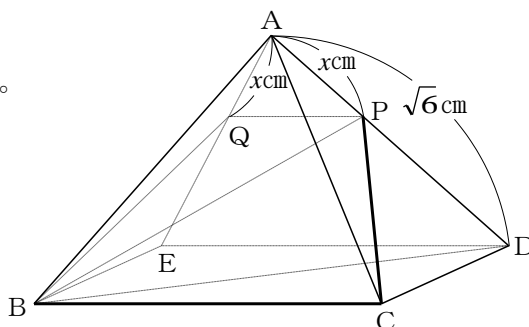
(四角すいA-BCDE)の体積をVとおくと、

$$(\text{三角すいA-BPQ}) = V \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{\sqrt{6}} \times \frac{x}{\sqrt{6}} = V \times \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{6}$$

$$(\text{三角すいA-BCP}) = V \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{\sqrt{6}} = V \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}x}{6}$$

$$\text{よって、} V \times \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{6} + V \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}x}{6} = \frac{1}{8} V, \quad 2x^2 + 2\sqrt{6}x - 3 = 0$$

$$0 < x (< \sqrt{6}) \text{ より、} x = \frac{-\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)} \dots (\text{答})$$



(2) 正八面体を1辺 $2\sqrt{6}$  cm の正四面体に埋め込んで考える。

右の図のように点を定めると、入れた水の量は、(三角すい台 $RST-XYZ$ )-(三角すい台 $RUV-XCF$ ) $\times 3$ で求められる。

ここで、正八面体の上の面( $\triangle ABE$ )から水面までの距離は、点 $B$ から $\triangle RUV$ に下ろした垂線 $BM$ の長さに等しい。

$$BL = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{6} = 2(\text{cm}) \text{ なので,}$$

(正四面体 $B-RUV$ ) $\sim$ (正四面体 $B-XCF$ )

で、相似比は  $BM : BL = \frac{1}{2} : 2 = 1 : 4$

よって、体積比は  $1^3 : 4^3 = 1 : 64$  となるので、

$$(\text{三角すい台 } RUV-XCF) \times 3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \times (\sqrt{6})^3 \times \frac{63}{64} \times 3 = \frac{189\sqrt{3}}{64} (\text{cm}^3)$$

また、(正四面体 $W-RST$ ) $\sim$ (正四面体 $W-XYZ$ )で、相似比は  $WR : WX = 5 : 8$  よって、体積比は  $5^3 : 8^3 = 125 : 512$  となるので、

$$(\text{三角すい台 } RST-XYZ) = \frac{\sqrt{2}}{12} \times (2\sqrt{6})^3 \times \frac{387}{512} = \frac{387\sqrt{3}}{64} (\text{cm}^3)$$

したがって、求める水の量は、 $\frac{387\sqrt{3}}{64} - \frac{189\sqrt{3}}{64} = \frac{198\sqrt{3}}{64} = \frac{99\sqrt{3}}{32} (\text{cm}^3) \dots(\text{答})$

