解答・解説

(1)　$n=96$ のとき，1 回操作を行うと，$96^2=9216$ よって，16

2 回操作を行うと，$16^2=\ 256$ よって，56

3 回操作を行うと，$56^2=3136$ よって，36

4 回操作を行うと，$36^2=1296$ よって，96 …(答)

(2)　2 けたの自然数 n の十の位を a，一の位を b とおくと，n は $10a+b$ と表せる。

$n^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$ より，$100a^2$ は明らかに 100 の倍数なので，1 回操作を行ってつくられる値は $20ab+b^2$ の下 2 けたの値になることがわかる。

ここで操作後の一の位に注目すると，b^2 の一の位の値であることがわかる。

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
b^2 の一の位	1	4	9	6	5	6	9	4	1

上の表より 1 回操作して一の位が 6 になるのは，$b=4$，6

これについて a の値は 1 から 9 がそれぞれ考えられるので，$2\times9=18$ (個) …(答)

(3)　(2)より，1 回操作をして一の位が 6 になるのは，$b=4$，6 だから，

$b=4$ のとき，$80a+16$ の下 2 けたの値が 96 になればよいので，$a=1$，6

$b=6$ のとき，$120a+36$ の下 2 けたの値が 96 になればよいので，$a=3$，8

よって，$n=14$，36，64，86 …(答)

(4)　(1)より，一度 96 になると，4 回操作を行うことで再び 96 になり，それがくり返されることがわかる。

$2018=4\times504+\mathbf{2}$ より，**2** 回操作を行って 96 になる n は，2018 回操作を行っても 96 になることがわかる。

また，問題文に「何回か操作を行って 96 になる n で，初めて 96 になるまで 6 回以上操作を行うものは存在しないことがわかっている」…※　とあることから，題意を満たすのは 2 回操作して 96 になる n である。

(3)より，「1 回操作を行って 96 になるのは，14，36，64，86」なので，「2 回操作して 96 になる n」は「1 回操作を行って 14，36，64，86 になる n」である。

1 回操作をして一の位が 4 になるのは，$b=2$，8 のときだから，

$b=2$ のとき，$40a+4$ の下 2 けたの値が 14，64 になればよいので，$a=4$，9

$b=8$ のとき，$160a+64$ の下 2 けたの値が 14，64 になればよいので，$a=5$

1 回操作をして一の位が 6 になるのは，$b=4$，6 のときだから，

$b=4$ のとき，$80a+16$ の下 2 けたの値が 36，86 になればよいので，$a=4$，9

$b=6$ のとき，$120a+36$ の下 2 けたの値が 36，86 になればよいので，$a=5$

よって，$n=42$，44，56，58，92，94 …(答)

※　(4)の解説と同様の方法で調べ続けると，

「3 回操作して 96 になる n」は 12，16，34，38，62，66，84，88

「4 回操作して 96 になる n」は 22，28，46，54，72，78，96

「5 回操作して 96 になる n」は 48，52，98

ここで(2)より，操作後の一の位が 2，8 になることはないので，

初めて 96 になるまで 6 回以上操作を行うものは存在しないことがわかる。